Exercícios
Matrizes, Vetores e Geometria Analítica - SMA0505

June 11, 2025

Exercícios

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Considerando A como uma matriz com entradas complexas, mostre que os autovalores de A são $\pm i$, isto é, A não tem autovalores reais.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 6 & 8 & -2 \\ 72 & -28 & 19 \end{bmatrix}$.
   (a) Calcule $p_{\mathrm{A}}(\lambda)$ o polinômio característico de A.
   (b) Encontre os autovalores de A e suas multiplicidades algébricas e geométricas.

3. Seja $p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 - 3\lambda + 2$.
   Seja $\mathrm{C} = \mathrm{C}(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.
   Mostre que $p_{\mathrm{C}}(\lambda) = p(\lambda)$, e que $p_{\mathrm{C}}(\mathrm{C}) = \mathbf{0}_{3\times 3}$.

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3i \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$.
   (a) Mostre que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
   (b) Mostre que $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é autovetor de A e B. Quais são os autovalores correspondentes?

5. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   (a) Mostre que $\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathrm{BA} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.
   (b) Mostre que $\lambda_1 = \frac{1}{2}(7+3\sqrt{3}i)$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}(7-3\sqrt{3}i)$ são os autovalores de AB e que $\lambda_1' = \frac{1}{2}(7+3\sqrt{3}i)$, $\lambda_2' = \frac{1}{2}(7-3\sqrt{3}i)$ e $\lambda_3' = 0$ são os autovalores de BA.